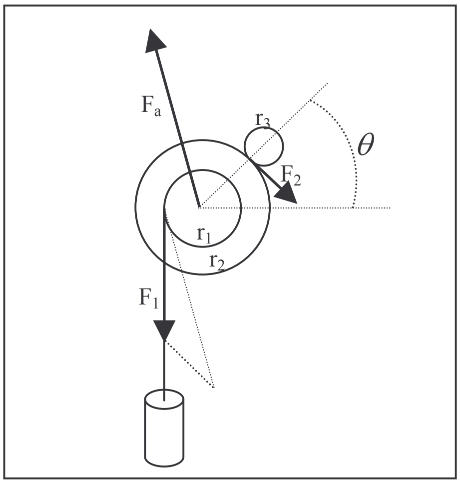
Les frottements dans les rouages
L'horloge horizontale ou la réduction des frottements

Julien Le Roy fait paraître en 1737 un nouveau modèle d'horloge, dite horloge horizontale, dans lequel les rouages sont dans un même plan horizontal plutôt que de se situer les uns au-dessus des autres. Cette invention paraît dans l'ouvrage d'Henry Sully intitulé *Règle artificielle du temps, seconde édition, corrigée et augmentée par M. Julien Le Roy* [C0002].
L'un des arguments en faveur de cette nouvelle disposition réside en la réduction significative des frottements, en particulier ceux intervenants sur le premier pignon des roues de sonneries. Julien Le Roy le démontre en partie dans le livre de Sully.

Nous reprenons dans ce papier cet argument et le démontrant dans le cas le plus général et en utilisant le formalisme mathématique actuel. Les formules peuvent sembler un peu compliquées, mais elles ne demandent pas un niveau de mathématique supérieur au baccalauréat.



Soit un pignon (ou barillet) R_1 de rayon r_1 monté sur un axe A sur lequel une roue R_2 de rayon r_2 est également montée. La roue r_2 engraine dans un autre pignon R_3. L'ensemble est supposé au repos et sans frottement.
Sur le pignon ou barillet r_1 s'exerce une force $\vec{F}_1$ causée par le poids (dans le cas d'un barillet) ou par une autre roue. Cette force $\vec{F}_1$ est retransmise au pignon R_3 et à l'axe A qui porte R_1 et R_2. La force qui s'exerce sur l'axe A est notée $\vec{F}_a$ et la force qui s'exerce sur la roue R_2 à l'engrenage entre R_2 et R_3 est notée $\vec{F}_2$. Enfin, l'angle entre les axes de R1 et de R3 d'une part et l'horizontale d'autre part forme un angle θ (cf. figure).
Comme le système est au repos, les forces s'annulent, ce qui se traduit par :

$$\vec{F_1} + \vec{F}_2 + \vec{F_a} = 0 \qquad \text{(équa 1)}$$

D'autre part, du fait du rapport entre le diamètre des roues, nous avons :

$$\left|\vec{F_1}\right| r_1 = \left|\vec{F_2}\right| r_2 \qquad \text{(équa. 2)}$$

Où $\left|\vec{F_1}\right|$ et $\left|\vec{F_2}\right|$ sont respectivement les amplitudes des $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$. Donc l'équation 2 se traduit par :

$$\left|\vec{F_2}\right| = \frac{\left|\vec{F_1}\right| r_1}{r_2} \qquad \text{(équa. 2 bis)}$$

Si l'on suppose que chacune des forces $\vec{F}_i$ se décompose suivant les axes *x* et *y* en deux composantes F_{ix} et F_{iy}, alors l'équation 1 devient :

$$\begin{cases} F_{1x} + F_{2x} + F_{ax} = 0 \\ F_{1y} + F_{2y} + F_{ay} = 0 \end{cases} \qquad \text{(équa. 1 bis)}$$

D'autre part, par construction, nous avons :

$$\begin{cases} F_{1x} = 0 \\ F_{1y} = \left|\overrightarrow{F_1}\right| \\ F_{2x} = \left|\overrightarrow{F_2}\right|\sin(\theta) \\ F_{2y} = \left|\overrightarrow{F_2}\right|\cos(\theta) \end{cases}$$

D'où, en combinant avec l'équation 1 bis :

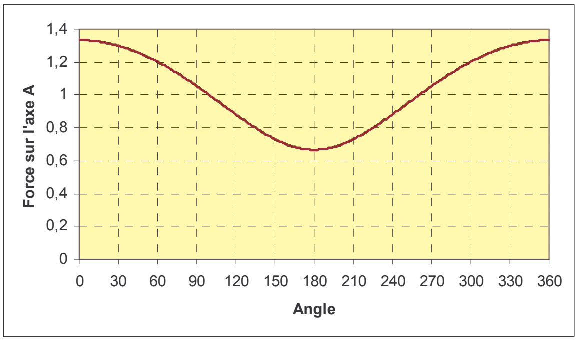
$$\begin{cases} F_{ax} = -F_{2x} = -\left|\overrightarrow{F_2}\right|\sin(\theta) = -F_{1y}\dfrac{r_1}{r_2}\sin(\theta) \\ F_{ay} = -F_{1y} - \left|\overrightarrow{F_2}\right|\cos(\theta) = -F_{1y}\left(1 + \dfrac{r_1}{r_2}\cos(\theta)\right) \end{cases} \qquad \text{(équa. 3)}$$

Enfin, comme nous avons :

$$\left|\overrightarrow{F_a}\right| = \sqrt{F_{ax}^2 + F_{ay}^2}$$

Nous en déduisons, en combinant avec l'équation 3, que :

$$\left|\overrightarrow{F_a}\right| = \left|F_{1y}\right|\sqrt{\frac{r_1^2}{r_2^2}\sin^2(\theta) + \left(1 + \frac{r_1}{r_2}\cos(\theta)\right)^2}$$

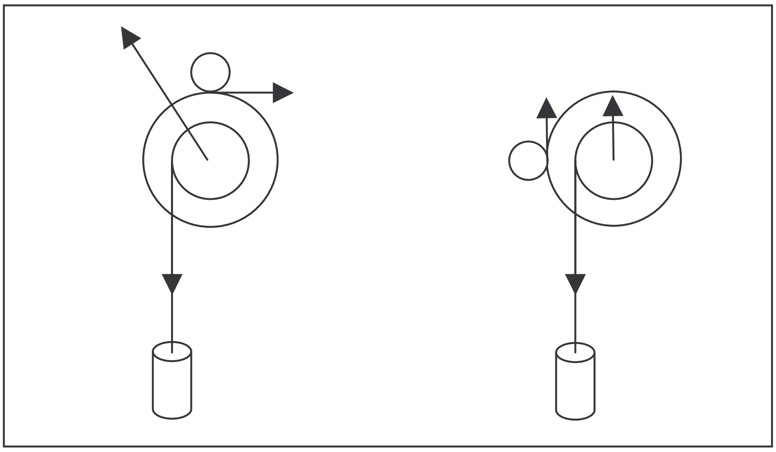


Après quelques simplifications, cela donne la formule finale :

$$\left|\overrightarrow{F_a}\right| = \left|\overrightarrow{F_1}\right|\sqrt{1 + \frac{r_1^2}{r_2^2} + 2\frac{r_1}{r_2}\cos(\theta)}$$

La force $\overrightarrow{F_a}$ est donc minimale lorsque $\cos(\theta) = -1$, c'est à dire lorsque $\theta = 180°$. Ceci est également exprimé par la figure ci-jointe qui donne la valeur de la force $\overrightarrow{F_a}$ en fonction de l'angle θ dans le cas d'un rapport $\dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{1}{3}$.

Dans le cas de l'horloge à cage, où les axes sont mis les uns au-dessus des autres, nous avons un angle de 90° entre la roue du barillet et le premier pignon, ce qui est loin d'être idéal. Par contre, dans le cas de l'horloge horizontale, comme le fait remarquer Julien Le Roy, l'angle peut être de 180°, ce qui permet d'avoir une force minimale sur l'axe du barillet, et donc un frottement et une usure minimaux. Par contre, les roues suivantes dans le rouage sont placées de façon non optimum, mais cela est beaucoup moins important, puisque les forces en jeu ont été divisées par le rapport entre les roues et pignons.



Note : Julien Le Roy [C0002] montre l'intérêt des horloges à cage horizontale, y compris pour le frottement exercé sur l'axe de la roue portant le poids. Il se borne à une démonstration succincte lorsque $r_1 = r_2$ et que, dans le cas le pire, $\theta = 0$, ce qui se traduit par $\left|\overrightarrow{F_a}\right| = 2\left|\overrightarrow{F_1}\right|$, ou que, dans le cas le plus avantageux, $\theta = 180°$, ce qui implique que $\left|\overrightarrow{F_a}\right| = 0$

Dans la pratique, les câbles des horloges horizontales partent soit vers le bas, soit vers le haut. La position du pignon devrait être inverse dans les deux cas… Donc, le problème n'est pas si simple à résoudre que ne le dit Julien Le Roy. La plupart des horlogers adoptent une position optimum lorsque le câble part vers le bas, mais non pas tous (par exemple Fumey).
